

Vergleich eines Stichprobenmittelwertes mit einem Populationsmittelwert

Inhaltsverzeichnis

Vergleich eines Stichprobenmittelwertes mit einem Populationsmittelwert	2
Lernhinweise	2
Einführung	2
Theorie (1-13)	2
1. Inhaltliche Fragestellung	3
2. Statistisch bearbeitbare Fragestellung	4
3. Arbeitshypothese und Alternativhypothese	4
4. Prüfgrösse und Prüfverteilung	4
5. Einordnung der Prüfgrösse in die Prüfverteilung	6
6. Transformation der Prüfgrösse Übertretenswahrscheinlichkeit	7
7. Beurteilung der Übertretungswahrscheinlichkeit und Interpretation	10
8. Zusammenfassung	10
9. Hinweis zum Prüfverfahren für kleine Stichproben	10
10. Inhaltliche und statistisch bearbeitbare Fragestellung	10
11. Prüfgrösse, Arbeitshypothese und Prüfverteilung	11
12. Transformation der Prüfgrösse in die tabellierte t-Verteilung	12
13. Zusammenfassung zum Lernschritt	14
Fallbeispiel (1-2)	14
1. Grosse Stichprobe	15
Prüfgrösse, Arbeitshypothese, Alternativhypothese und Prüfverteilung	
Prüfverteilung	
Transformation der Prüfgrösse und Übertretungswahrscheinlichkeit	
Beurteilung der Übertretungswahrscheinlichkeit und Interpretation	
2. Kleine Stichprobe	22
Prüfgrösse, Arbeitshypothese, Alternativhypothese und Prüfverteilung	
Transformation der Prüfgrösse und Übertretungswahrscheinlichkeit	
Beurteilung der Übertretungswahrscheinlichkeit und Interpretation	
Lernkontrolle	25

Vergleich eines Stichprobenmittelwertes mit einem Populationsmittelwert

Lernhinweise

Lernziele

- Sie kennen die theoretischen Grundlagen zur Durchführung eines parametrischen Prüfverfahrens zum Mittelwertvergleich.
- Sie kennen das Prüfverfahren für "grosse" und für kleine "Stichproben" und kennen die Unterschiede.
- Sie können ein Beispiel zum Mittelwertvergleich (Stichprobe - Population) lösen.

Sie werden diesen Lernschritt mit Erfolg und in ca. 90 Minuten bearbeiten, wenn Sie die in Ihrem Curriculum vorgesehenen Vorbereitungstexte durchgearbeitet haben.

Hinweise auf Vertiefungsmöglichkeiten

Am Ende einzelner Bildschirmseiten erhalten Sie Vorschläge, wie Sie den Inhalt vertiefen können (nur beim Prüfverfahren für "grosse" Stichproben). Es wird zwischen Einzel- und Gruppenarbeit unterschieden. Auf der jeweils folgenden Theorie- oder Beispielseite wird die Lösung angegeben. Die Bearbeitung der Vertiefungsvorschläge ist freiwillig.

Zusätzliches Arbeitsmaterial: Wer beabsichtigt, diese Vertiefungsvorschläge zu bearbeiten, benötigt zusätzlich Notizpapier und Schreibzeug.

Einführung

Der vorliegende Lernschritt beschäftigt sich mit der Frage, ob eine Stichprobe 1 aus einer Population 1 stammt, die hinsichtlich des arithmetischen Mittelwertes mit einer bekannten Population identisch ist. Im ersten Teil beschäftigen wir uns mit "grossen", im zweiten Teil mit "kleinen" Stichproben. Der Lernschritt erläutert einerseits die theoretischen Grundlagen, andererseits können Sie mitverfolgen, wie ein Beispiel exemplarisch gelöst wird.

Theorie (1-13)

Inhaltsübersicht

- [1. Inhaltliche Fragestellung](#)
- [2. Statistisch bearbeitbare Fragestellung](#)
- [3. Arbeitshypothese und Alternativhypothese](#)
- [4. Prüfgrösse und Prüfverteilung](#)
- [5. Einordnung der Prüfgrösse in die Prüfverteilung](#)
- [6. Transformation der Prüfgrösse Übertretenswahrscheinlichkeit](#)
- [7. Beurteilung der Übertretungswahrscheinlichkeit und Interpretation](#)
- [8. Zusammenfassung](#)
- [9. Hinweis zum Prüfverfahren für kleine Stichproben](#)

- 10. Inhaltliche und statistisch bearbeitbare Fragestellung
- 11. Prüfgrösse, Arbeitshypothese und Prüfverteilung
- 12. Transformation der Prüfgrösse in die tabellierte t-Verteilung
- 13. Zusammenfassung zum Lernschritt

1. Inhaltliche Fragestellung

Im Rahmen einer empirischen Untersuchung haben Sie in einer Stichprobe ein Merkmal erhoben. Dieses ist intervall- oder proportionalskaliert, das heisst, die Differenzen zwischen den einzelnen Ausprägungsgraden sind gleich gross, sie sind äquidistant. Besteht zudem ein absoluter Nullpunkt, so liegen proportionalskalierte Daten vor.

Die Personen Ihrer Stichprobe wurden z. B. mit einer neuen Methode unterrichtet oder mit einem neuen Medikament behandelt. Im vorliegenden Fall gibt es nur eine Stichprobe, wir nennen sie die Stichprobe 1. Sie stellen die Frage, ob Ihre Stichprobe 1 mit n Versuchspersonen und mit den beiden Verteilungskennwerten

$$\bar{x}_1$$

und

$$s_1$$

, hinsichtlich des Mittelwertes aus der bekannten Population 0 mit den Parametern

$$\mu_0 \text{ und } \sigma_0$$

stammt.

Zum jetzigen Zeitpunkt wird eine positive oder negative Differenz zwischen den Mittelwerten nicht beachtet, wir prüfen also zweiseitig.

Die inhaltliche Fragestellung könnte man graphisch so darstellen:

Dieses Element (Animation, Video etc.) kann in der PDF version nicht dargestellt werden und ist nur in der online Version sichtbar. [\[link\]](#)

Die Fragestellung und die Skizze stimmen so im Alltag. Aus statistischer Sicht sind nun aber weder die Frage noch die Graphik korrekt. Zudem kann die Fragestellung mit statistischen Mitteln so nicht bearbeitet werden.

Vorschläge zur Vertiefung

- **Einzelarbeit:** Formulieren Sie die Frage so, dass sie statistisch bearbeitbar ist und erstellen Sie dazu eine Skizze.
- **Gruppenarbeit:** Diskutieren Sie, wie die Frage verändert werden muss, damit sie statistisch bearbeitbar ist. Eine Person erstellt eine entsprechende Skizze, eine zweite Person beschriftet sie.
- Die Antwort auf den Vertiefungsvorschlag finden Sie auf der nächsten "Theorieseite".

2. Statistisch bearbeitbare Fragestellung

- Die Frage kann so nicht gestellt werden. Sie ist inhaltlich nicht korrekt und statistisch nicht bearbeitbar. Die Stichprobe 1 stammt offensichtlich nicht aus der bekannten Population 0, da sie bekanntermassen mit einer anderen Methode unterrichtet oder mit einem anderen Medikament behandelt wurde.
- Es interessiert, ob die Personen aus der Stichprobe 1 durchschnittlich ebenso gute Leistungen erbringen oder Messwerte aufweisen, wie diejenigen der Population 0.
- **Die statistisch bearbeitbare Frage lautet:** Stammt die Stichprobe 1 aus einer Population 1, die hinsichtlich des Mittelwertes mit der Population 0 identisch ist.

Dieses Element (Animation, Video etc.) kann in der PDF version nicht dargestellt werden und ist nur in der online Version sichtbar. [\[link\]](#)

3. Arbeitshypothese und Alternativhypothese

Damit Sie die Frage statistisch weiter bearbeiten können, brauchen Sie zunächst eine Arbeitshypothese. Ich schlage Ihnen die Nullhypothese H_0 vor. Formalisiert lautet sie:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_0$$

. Die Nullhypothese postuliert, dass sich die Mittelwerte der beiden Populationen nicht unterscheiden. Die Graphik illustriert den Gedankengang.

Dieses Element (Animation, Video etc.) kann in der PDF version nicht dargestellt werden und ist nur in der online Version sichtbar. [\[link\]](#)

Der Arbeitshypothese H_0 stellen wir die Alternativhypothese H_1 gegenüber. Wir wählen als Beispiel

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_0$$

Diese Alternativhypothese ist **ungerichtet** weil sie nur Ungleichheit postuliert. Sie ist **unspezifisch**, weil sie keine Angabe über die Grösse des Unterschieds macht.

Im nächsten Schritt bestimmen Sie die Prüfgrösse und die Prüfverteilung. Diese sind notwendig, um die Nullhypothese zu prüfen.

4. Prüfgrösse und Prüfverteilung

Die Prüfgrösse ist der Verteilungskennwert, der Sie am meisten interessiert, d. h. den sie einem Prüfverfahren - einem Vergleich - unterziehen wollen. Aufgrund unserer Fragestellung ist dies der Mittelwert Ihrer Stichprobe.

Prüfgrösse:

$$\bar{x}$$

Prüfverteilung

- Prüfverteilung ist die Verteilung der Stichprobenmittelwerte

$$\bar{X}$$

, wenn H_0 gültig ist.

- Die Parameter der Prüfverteilung heissen

$$\mu_{\bar{X}}$$

und

$$\sigma_{\bar{X}}$$

.

Vorschlag zur Vertiefung

- Aufgrund Ihrer Kenntnisse zum zentralen Grenzwerttheorem und der vorangegangenen Informationen sind Sie in der Lage, die Prüfverteilung zu bestimmen, ebenso die Verteilungsparameter

$$\mu_{\bar{X}}$$

und

$$\sigma_{\bar{X}}$$

.

- Einzelarbeit: Erstellen Sie eine Skizze der Prüfverteilung und bestimmen Sie die Kennwerte

$$\mu_{\bar{X}}$$

und

$$\sigma_{\bar{X}}$$

, bzw. geben Sie die Formel an, wie diese berechnet werden können.

- Gruppenarbeit: Eine Person skizziert die Prüfverteilung; eine zweite Person kommentiert, was gezeichnet und geschrieben wird. Erklären Sie, wie

$$\mu_{\bar{X}}$$

und

$$\sigma_{\bar{X}}$$

zu bestimmen sind.

- Die Antwort auf den Vertiefungsvorschlag erhalten Sie auf der nächsten Theorieseite.

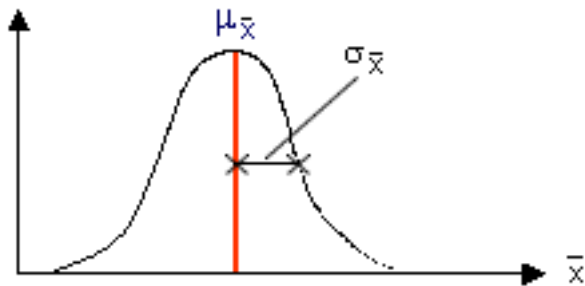
Das zentrale Grenzwerttheorem besagt, dass die Mittelwerte von grossen Zufallsstichproben ($n > 30$) mit den Parametern

$$\mu_{\bar{X}}$$

und

$$\sigma_{\bar{x}}$$

näherungsweise normalverteilt sind.



Unter der Voraussetzung, dass

$$H_0: \mu_0 = \mu_1$$

gültig ist, können Sie die Verteilungsparameter der Prüfverteilung bestimmen:

$$\mu_{\bar{x}}$$

=

$$\mu_0$$

und

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma_0 / \sqrt{n}$$

.

Damit ist die Prüfverteilung vollständig bestimmt.

5. Einordnung der Prüfgrösse in die Prüfverteilung

Als nächstes ordnen Sie

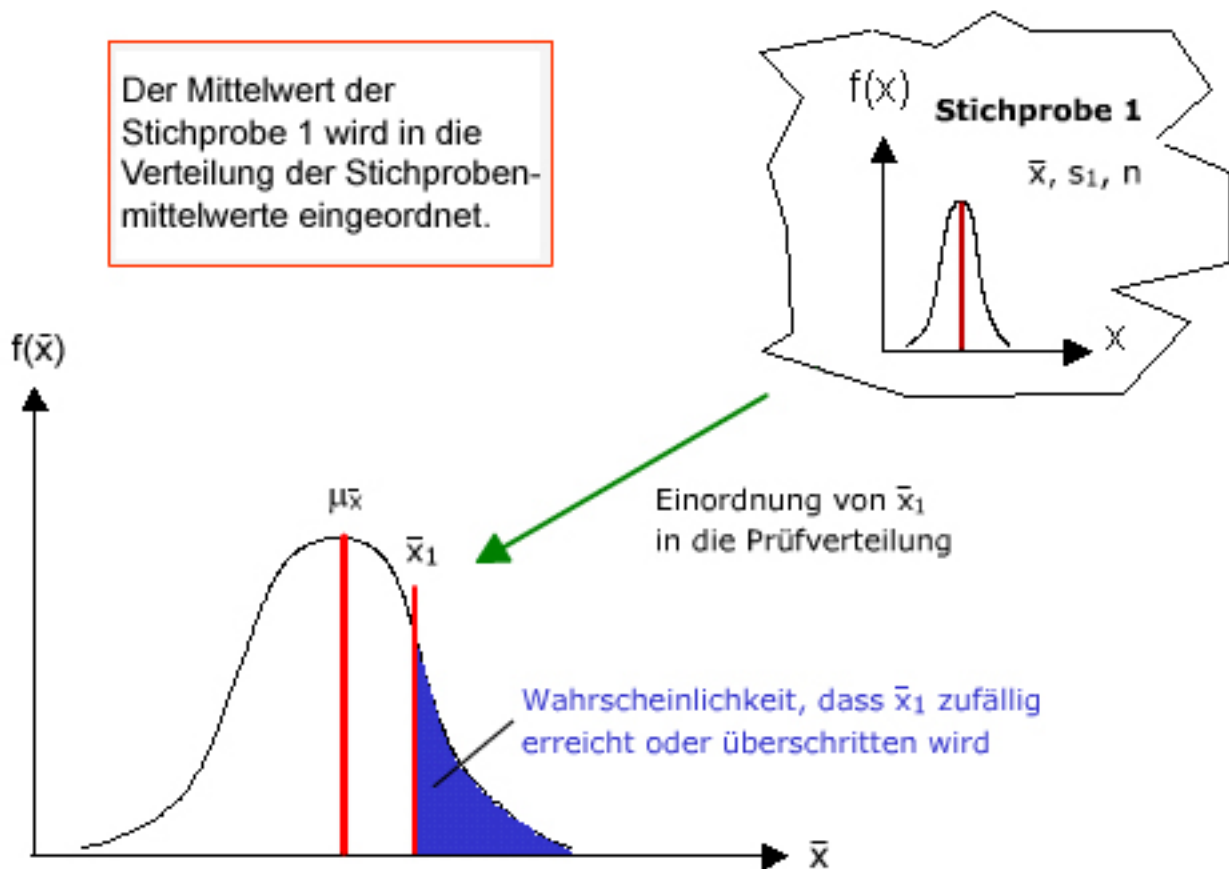
$$\bar{x}_1$$

in die Prüfverteilung ein. So können Sie bestimmen, mit welcher Wahrscheinlichkeit der beobachtete Mittelwert

$$\bar{x}_1$$

zufällig erreicht oder überschritten wird.

Einordnung der Prüfgrösse in die Prüfverteilung



Die Wahrscheinlichkeit, dass

$$\bar{x}_1$$

zufällig erreicht oder überschritten wird, entspricht der eingezeichneten Fläche.

Zur numerischen Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit verwenden wir die Standardnormalverteilung. Zu diesem Zweck transformieren Sie

$$\bar{x}_1$$

in die Standardnormalverteilung. Das genaue Vorgehen wird auf der nächsten Theorieseite erläutert.

6. Transformation der Prüfgrösse Übertretenswahrscheinlichkeit

In diesem Schritt transformieren Sie den Mittelwert

$$\bar{x}_1$$

in die standardisierte Normalverteilung.

Die entscheidenden Daten sind:

- μ_0
: Populationsmittelwert der Population 0
- $\mu_{\bar{x}}$
: Mittelwert der Verteilung der Stichprobenmittelwerte (Prüfverteilung).
- $\sigma_{\bar{x}}$
: Standardabweichung der Verteilung der Stichprobenmittelwerte (Prüfverteilung).
- $\bar{x}_1$
: Mittelwert der Stichprobe 1.
- $z_{\bar{x}_1}$
: z-transformierter Stichprobenmittelwert.

Dieses Element (Animation, Video etc.) kann in der PDF version nicht dargestellt werden und ist nur in der online Version sichtbar. [\[link\]](#)

Die Transformation nehmen Sie anhand dieser Formel vor:

$$z_{\bar{x}_1} = \frac{\bar{x}_1 - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x}_1 - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}$$

Da Sie jetzt

$$z_{\bar{x}_1}$$

kennen, können Sie anhand der z-Tabelle die Überschreitungswahrscheinlichkeit bestimmen, mit der

$$\bar{x}_1$$

zufällig erreicht oder überschritten wird.

Soll die einseitige oder die zweiseitige Überschreitungswahrscheinlichkeit bestimmt werden?

Zur Beantwortung dieser Frage müssen Sie sich unsere Fragestellung nochmals vergegenwärtigen: Stammt die Stichprobe 1 aus einer Population 1, die hinsichtlich des Mittelwertes mit der bekannten Population 0 identisch ist?

Diese Frage berücksichtigt das Vorzeichen eines allfälligen Unterschiedes nicht, somit handelt es sich um eine zweiseitige oder ungerichtete Fragestellung.

Vorschlag zur Vertiefung

- **Einzelarbeit:** Erstellen Sie eine Skizze von der Standardnormalverteilung, tragen Sie

$$z_{\bar{x}_1}$$

für die zweiseitige Fragestellung ein und markieren Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der

$$z_{\bar{x}_1}$$

zufällig erreicht und über- bzw. unterschritten wird. Beschriften Sie die Skizze.

- **Gruppenarbeit:** Jedes Gruppenmitglied erstellt eine Skizze von der Standardnormalverteilung, trägt

$$z_{\bar{x}_1}$$

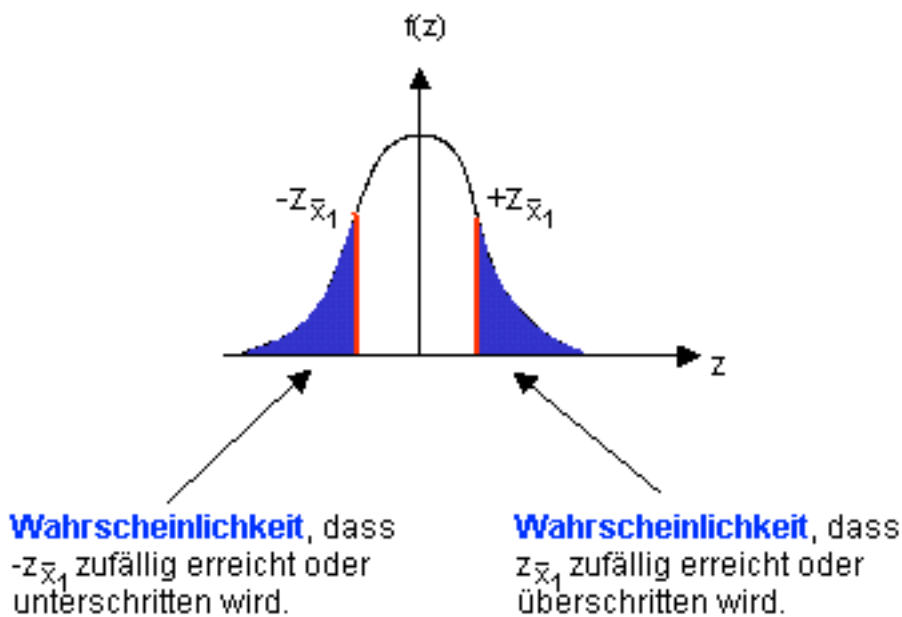
für die zweiseitige Fragestellung ein und markiert die Wahrscheinlichkeit, mit der

$$z_{\bar{x}_1}$$

erreicht und über- bzw. unterschritten wird. Beschriften Sie die Skizze und diskutieren Sie miteinander die Lösungen. Klären Sie abweichende Lösungsvorschläge.

- Die Antwort auf den Vertiefungsvorschlag erhalten Sie auf der nächsten Theorieseite.

Die Graphik illustriert die zweiseitige Überschreitungswahrscheinlichkeit für unsere ungerichtete Fragestellung. (ungerichtete Alternativhypothese H_1)



Jetzt verfügen Sie über alle notwendigen Informationen und können im nächsten Schritt die zweiseitige Überschreitungswahrscheinlichkeit der entsprechenden z-Tabelle entnehmen.

Das folgende Beispiel zeigt, wie die zweiseitige Überschreitungswahrscheinlichkeit bestimmt wird. Wir nehmen an, dass

$$z_{\bar{x}_1} = \pm 2,2$$

sei.

7. Beurteilung der Übertretungswahrscheinlichkeit und Interpretation

Wir beurteilen die Überschreitungswahrscheinlichkeit anhand der üblichen Signifikanzniveaus von 5%, 1% und 0.1%.

Im Falle unseres Beispiels ist $p < 5\%$, d.h. wir lehnen H_0 mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $p < 5\%$ zu Gunsten von H_1 ab. Dies bedeutet, dass mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $p < 5\%$ angenommen werden darf, dass die Stichprobe 1 aus einer Population 1 stammt, deren Mittelwert nicht mit dem Mittelwert der bekannten Population 0 übereinstimmt.

Jetzt wissen Sie: Die Intervention, die Sie an den Versuchspersonen der Stichprobe 1 vorgenommen haben, hat hinsichtlich des Stichprobenmittelwertes etwas verändert. Die Stichprobe 1 stammt hinsichtlich des Mittelwertes nicht aus der Population 0.

Mit diesem Schritt sind Sie am Ende des Prüfverfahrens für grosse Stichproben.

8. Zusammenfassung

1. Formulieren Sie eine inhaltliche Frage zur Problemstellung.
2. Formulieren Sie diese Frage als eine statistisch bearbeitbare Frage.
3. Bestimmen Sie die Prüfgrösse (arithmetischer Mittelwert) und formulieren Sie die Arbeitshypothese.
4. Bestimmen Sie die Prüfverteilung und ihre Parameter unter der Annahme, dass H_0 gültig ist.
5. Transformieren Sie die Prüfgrösse in die Standardnormalverteilung (z-Verteilung).
6. Entscheiden Sie aufgrund der Überschreitungswahrscheinlichkeit, ob Sie H_0 ablehnen oder nicht ablehnen können. Je nachdem, ob Sie gerichtet oder ungerichtet prüfen, wählen Sie die Tabelle mit einseitiger oder zweiseitiger Überschreitungswahrscheinlichkeit.
7. Interpretieren Sie das Ergebnis.

9. Hinweis zum Prüfverfahren für kleine Stichproben

Im folgenden wollen wir der Frage nachgehen, wie der Mittelwert eines Merkmals, das in einer kleinen Stichprobe $n \leq 30$ erhoben wurde, mit einem bekannten Populationsmittelwert verglichen werden kann. Dabei setze ich voraus, dass Sie das vorgängig besprochene Prüfungsverfahren für grosse Stichproben durchgearbeitet haben. Das Verfahren für kleine Stichproben unterscheidet sich von diesem nur bezüglich der Prüfverteilung. So können wir uns etwas kürzer fassen.

10. Inhaltliche und statistisch bearbeitbare Fragestellung

Ausgangslage: Sie haben in einer kleinen Stichprobe von 25 Personen, wir nennen die Stichprobe 2, ein Merkmal erhoben. Das Merkmal ist proportionalskaliert. Die Verteilungskennwerte des Merkmals in der Stichprobe 2,

$\bar{x}_2$

und

$$s_2$$

, sind bekannt. Die Verteilungsparameter des Merkmals in der Population 0,

$$\mu_0 \text{ und } \sigma_0$$

, sind ebenfalls bekannt. Der Mittelwert

$$\bar{x}_2$$

ist beispielsweise um 3 Punkte grösser als

$$\mu_0$$

.

Inhaltliche Fragestellung: Ist es möglich, dass die Stichprobe 2 mit dem Mittelwert

$$\bar{x}_2$$

, der um 3 Punkte grösser ist als der Mittelwert der Population 0, aus der bekannten Population 0 stammt? Das heisst: Ist die positive Differenz von +3 Punkten zufällig entstanden?

Statistisch bearbeitbare Fragestellung: Stammt die Stichprobe 2 ($n = 30$) mit den Kennwerten

$$\bar{x}_2$$

und

$$s_2$$

aus einer Population 2, die hinsichtlich des Mittelwertes mit der bekannten Population 0 identisch ist?

11. Prüfgrösse, Arbeitshypothese und Prüfverteilung

Prüfgrösse: Aufgrund der Fragestellung ist der Stichprobenmittelwert

$$\bar{x}_2$$

die Prüfgrösse.

Arbeitshypothese H_0 : Wir wählen die Arbeitshypothese H_0 , die postuliert, dass die Stichprobe 2 aus einer Population 2 stammt, die hinsichtlich des Mittelwertes mit der bekannten Population 0 übereinstimmt.

$$H_0: \mu_2 = \mu_0$$

Alternativhypothese H_1 : Da wir den positiven Unterschied von +3 Punkten zwischen Stichproben- und Populationsmittelwert auf Zufälligkeit prüfen wollen, wählen wir eine gerichtete Alternativhypothese. Diese postuliert, dass

$$\mu_2$$

grösser sei als

$$\mu_0$$

.

$$H_1: \mu_2 > \mu_0$$

Prüfverteilung: Im Gegensatz zu grossen Stichproben, gilt bei kleinen Stichproben $n \leq 30$ das zentrale Grenzwerttheorem nicht. Wir müssen voraussetzen, dass das interessierende Merkmal in der Population näherungsweise normalverteilt ist. Nur in diesem Fall ist die Prüfverteilung bekannt:

Unter der Annahme, dass H_0 gültig ist, sind die Stichprobenmittelwerte mit $df = (n-1)$ t-verteilt.

Die Parameter der Prüfverteilung sind:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu_0$$

und

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma_0 / \sqrt{n}$$

. Der Freiheitsgrad $df = (n-1)$ bestimmt die Form der t-Verteilung.

12. Transformation der Prüfgrösse in die tabellierte t-Verteilung

Damit Sie die Wahrscheinlichkeit bestimmen können, mit welcher der Stichprobenmittelwert

$$\bar{x}_2$$

im Rahmen der Prüfverteilung zufällig erreicht oder überschritten wird, transformieren Sie

$$\bar{x}_2$$

in die t-Verteilung:

$$t_{\bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_2 - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}$$

.

Die Transformation entspricht der besprochenen z-Transformation. Da die Prüfgrösse t-verteilt ist (Freiheitsgrad $df = n-1$), benutzen wir aber zur Bestimmung der Überschreitungswahrscheinlichkeit p die t-Tabelle für die t-Verteilung mit dem Freiheitsgrad df . Da wir eine gerichtete Fragestellung untersuchen und der Arbeitshypothese H_0 eine gerichtete Alternativhypothese H_1 gegenüberstellen, suchen wir die einseitige Überschreitungswahrscheinlichkeit für den t-transformierten Ausprägungsgrad der Prüfgrösse.

Jetzt konsultieren Sie die t-Tabelle. Beachten Sie dabei den Aufbau der t-Tabelle. (So wird z.B. die Tabelle D (Hirsig, 2001) für einseitige Hypothesenprüfung von unten gelesen.)

Zur Veranschaulichung nehmen wir an, dass $df = 24$ und

$$t_{\bar{x}_2} = 1,38$$

Vergleich eines Stichprobenmittelwertes mit einem Populationsmittelwert

sei. Die folgende Darstellung zeigt die Einordnung des Ausprägungsgrades der Prüfgrösse in die Liste der Grenzwerte der t-Verteilung mit $df = 24$.

df= 24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,79	3,08
p%	10%	5%	2,5%	1%	0,5%	0,25%



Ihr $t_{\bar{x}_2} = 1,38$ kommt vor die 5% Grenze zu liegen.

Die Überschreitungswahrscheinlichkeit von

$t_{\bar{x}_2}$

ist grösser als 5%. Sie können H_0 nicht ablehnen. Das bedeutet, dass Sie nicht ausschliessen können, dass Ihre Stichprobe 2 aus einer Population 2 stammt, die hinsichtlich des Mittelwertes mit der bekannten Population 0 identisch ist. Der positive Unterschied zwischen dem Stichproben- und dem Populationsmittelwert kann zufällig entstanden sein. Eine Irrtumswahrscheinlichkeit kann nicht angegeben werden.

13. Zusammenfassung zum Lernschritt

Grosse Stichprobe $n > 30$	Kleine Stichprobe $n \leq 30$
1. Formulieren Sie eine inhaltliche Frage zur Problemstellung.	Bleibt identisch.
2. Formulieren Sie die Frage so, dass sie statistisch bearbeitbar ist.	Bleibt identisch.
3. Bestimmen Sie die Prüfgrösse und formulieren Sie die Arbeitshypothese H_0 und die Alternativhypothese H_1 .	Bleibt identisch.
4. Bestimmen Sie die Prüfverteilung: Unter der Annahme, dass H_0 gültig ist, sind die Stichprobenmittelwerte mit den Parametern μ_x und σ_x normalverteilt.	Sie müssen voraussetzen, dass das Merkmal in der Population näherungsweise normalverteilt ist (das zentrale Grenzwerttheorem gilt nicht). Unter der Annahme, dass H_0 gültig ist, sind die Stichprobenmittelwerte mit $df = (n-1)$ und den Verteilungsparametern μ_x und σ_x t-verteilt.
5. Transformieren Sie die Prüfgrösse in die Standardnormalverteilung (z-Verteilung).	Transformieren Sie die Prüfgrösse in die tabellierte t-Verteilung.
6. Entscheiden Sie anhand der Überschreitungswahrscheinlichkeit, ob Sie H_0 ablehnen oder nicht ablehnen können. Je nachdem, ob sie gerichtet oder ungerichtet prüfen, wählen Sie die Tabelle für einseitige oder zweiseitige Überschreitungswahrscheinlichkeiten. Konsultieren Sie die z-Tabelle.	Bleibt identisch, ausser: Konsultieren Sie die t-Tabelle unter Berücksichtigung des Freiheitsgrades $df = (n-1)$.
7. Interpretieren Sie das Prüfungsergebnis.	Bleibt identisch.

Fallbeispiel (1-2)

Inhaltsübersicht

- 1. Grosse Stichprobe ($n > 30$)
- 2. Kleine Stichprobe ($n \leq 30$)

1. Grosse Stichprobe

Im Rahmen einer gesamteuropäisch konzipierten Bildungspolitik einigten sich 1998 die Bildungsminister auf ein einheitliches Statistiklehrprogramm für Studierende der Sozialwissenschaften. Dieses wurde in Frankreich von Prof. Cresson entwickelt. In der Folge wurde an allen Universitäten nach dieser Methode gelehrt und gelernt. Im Rahmen der auch standardisierten Zwischenprüfungen ergaben sich in der Population 0 der europäischen Studierenden für die Verteilung der Prüfungsleistungen die folgenden Parameter:

$$\mu_0 = 50, \sigma_0 = 10$$

.

Drei Jahre später, im Jahre 2001, präsentierte in England ein Statistiker ein Lehrprogramm, das mehrheitlich mit CBL (Computer Based Learning) arbeitet. Seine Studierenden lernten in diesem Jahr nach dieser Methode. Bei der standardisierten Zwischenprüfung erreichten die 120 Studierenden Prüfungsergebnisse, die mit folgenden Stichprobenkennwerten beschrieben werden können:

$$\bar{x}_1 = 60, s_1 = 20$$

.

Inhaltliche Frage: Ist ein Unterschied von +/- 10 Punkten zwischen den Leistungsmittelwerten der Population 0 und der Stichprobe 1 gross genug, damit man ihn interpretieren kann?

Statistisch bearbeitbare Fragestellung: Stammt die Stichprobe 1

$$(n_1 = 120)$$

mit den Verteilungskennwerten

$$\bar{x}_1 = 60, s_1 = 20$$

aus einer Population 1, die hinsichtlich des Mittelwertes mit der Population 0 (Parameter

$$\mu_0 = 50, \sigma_0 = 10$$

) identisch ist?

Die uns interessierende Grösse ist der Stichprobenmittelwert

$$\bar{x}_1$$

.

Prüfgrösse:

$$\bar{x}_1$$

Ausprägungsgrad der Prüfgrösse: 60

Arbeitshypothese H_0 :

$$\mu_1 = \mu_0$$

Die Arbeitshypothese H postuliert, dass die Stichprobe 1 (Studierende aus England) aus einer Population 1 stammt, die hinsichtlich des Mittelwerts mit der Population 0 (Gesamtheit der europäischen Studierenden) identisch ist.

Alternativhypothese H_1 :

$$\mu_1 \neq \mu_0$$

Aufgrund unserer Fragestellung stellen wir der Alternativhypothese H_0 eine ungerichtete, unspezifische Alternativhypothese H_1 gegenüber. Sie ist ungerichtet, weil sie nur Ungleichheit postuliert, d.h. das Vorzeichen des Unterschieds ist ohne Bedeutung. Sie ist unspezifisch, weil sie keine Angabe macht über die Grösse des Unterschieds.

Im nächsten Schritt bestimmen wir die Prüfverteilung.

Die Prüfverteilung ist die Verteilung der Prüfgrösse

$$\bar{x}$$

für den Fall, dass die Arbeitshypothese H_0 gültig ist. Die Verteilungsparameter der Prüfverteilung sind

$$\mu_{\bar{x}}$$

und

$$\sigma_{\bar{x}}$$

.

Vorschlag zur Vertiefung

- Aufgrund unserer Kenntnisse zum zentralen Grenzwerttheorem und der vorangegangenen Informationen sind wir in der Lage, die Prüfverteilung zu bestimmen, ebenso die Verteilungsparameter

$$\mu_{\bar{x}}$$

und

$$\sigma_{\bar{x}}$$

.

- Zur Erinnerung: Das zentrale Grenzwerttheorem besagt, dass die Mittelwerte von Zufallsstichproben der Grösse $n > 30$ mit den Parametern

$$\mu_{\bar{x}}$$

=

$$\mu_0$$

näherungsweise normalverteilt sind.

- Einzelarbeit:** Erstellen Sie eine Skizze der Prüfverteilung und bestimmen Sie die Kennwerte

$$\mu_{\bar{x}}$$

und

$$\sigma_{\bar{x}}$$

, bzw. geben Sie die Formel an, wie diese berechnet werden können.

Vergleich eines Stichprobenmittelwertes mit einem Populationsmittelwert

- **Gruppenarbeit:** Eine Person skizziert die Prüfverteilung; eine zweite Person kommentiert, was gezeichnet und geschrieben wird. Erklären Sie, wie

$$\mu_{\bar{X}}$$

und

$$\sigma_{\bar{X}}$$

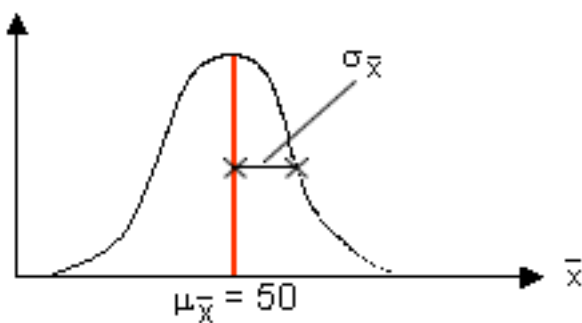
zu bestimmen, bzw. zu berechnen sind.

Antwort auf den Vertiefungsvorschlag

Prüfverteilung: Verteilung von $\bar{x}$

$$\mu_{\bar{x}} = \underbrace{\mu_0 = \mu_1}_{H_0} = 50$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{120}} = \frac{10}{10,95} = 0,91$$



Wenn H_0 gültig ist, dann gilt:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu_0 = \mu_1 = 50$$

. Die Standardabweichung

$$\sigma_{\bar{X}}$$

der Prüfverteilung können wir berechnen:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

Für unser Beispiel gilt:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{120}} = \frac{10}{10,95} = 0,91$$

Einordnung des Stichprobenmittelwertes in die Prüfverteilung

Als nächstes ordnen wir den konkreten Ausprägungsgrad unserer Prüfgrösse

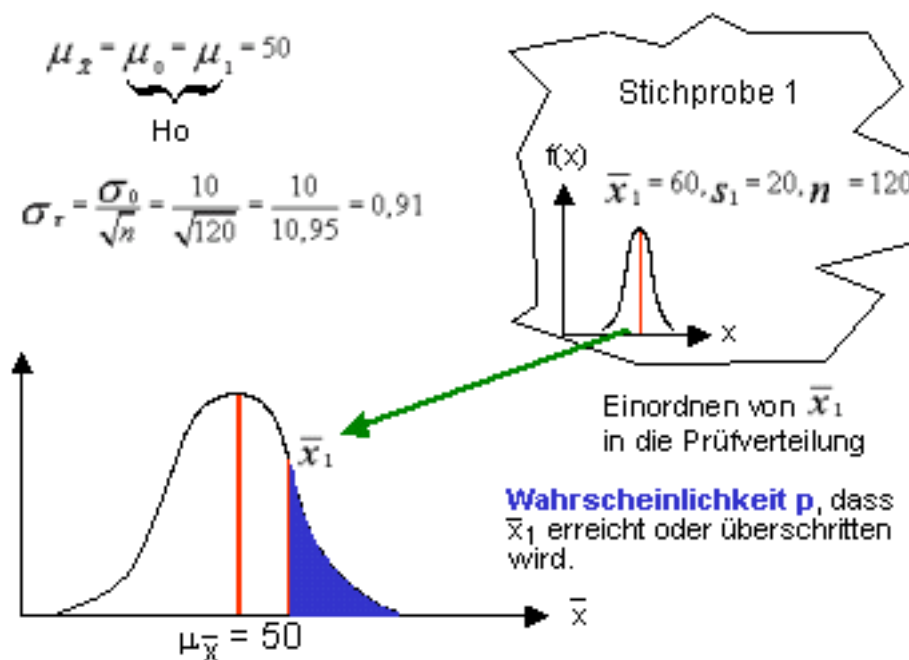
$$\bar{x}_1$$

in die Prüfverteilung ein. Anhand dieser Einordnung können wir bestimmen, mit welcher Wahrscheinlichkeit p der beobachtete Mittelwert

$$\bar{x}_1$$

= 60 zufällig erreicht oder überschritten wird.

Prüfverteilung: Verteilung von $\bar{x}$



Zur numerischen Bestimmung der Wahrscheinlichkeit p verwenden wir die Standardnormalverteilung. Wir transformieren auf der nächsten Seite

$$\bar{x}_1$$

in die Standardnormalverteilung.

In diesem Schritt transformieren wir den Mittelwert

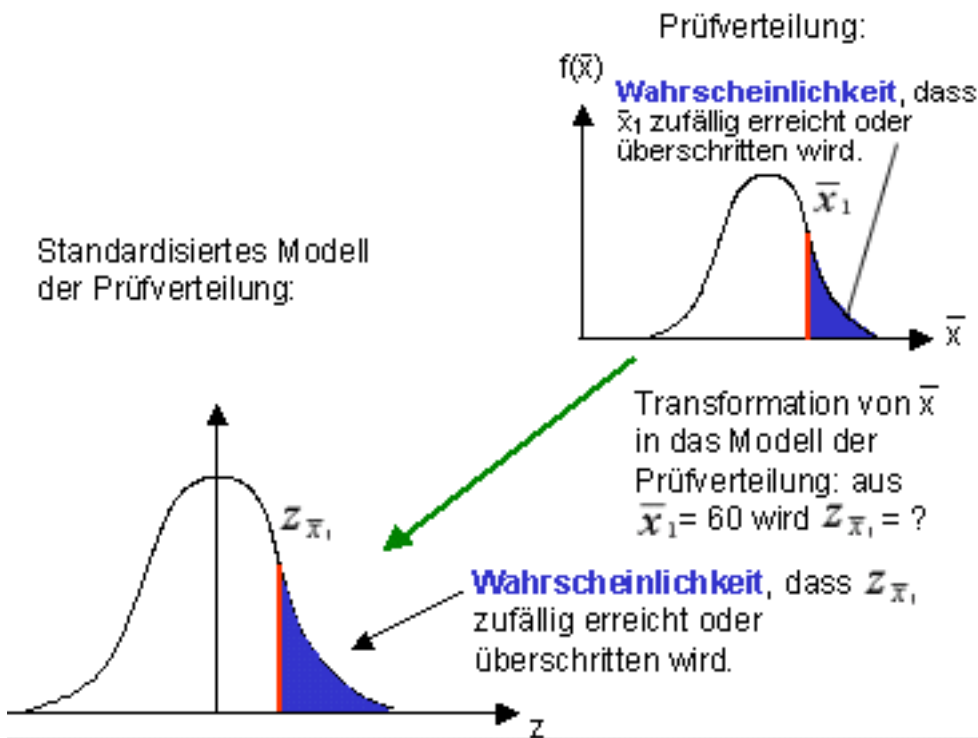
$$\bar{x}_1$$

unserer Stichprobe 1 in die standardisierte Prüfverteilung.

Die entscheidenden Daten sind:

Vergleich eines Stichprobenmittelwertes mit einem Populationsmittelwert

- μ_0
= 50 : Populationsmittelwert der Population 0.
- $\mu_{\bar{x}}$
= 50 : Mittelwert der Verteilung der Stichprobenmittelwerte (der Prüfverteilung).
- $\sigma_{\bar{x}}$
= 0,91 : Standardabweichung der Verteilung der Stichprobenmittelwerte (der Prüfverteilung).
- $\bar{x}_1$
= 60 : Mittelwert der Stichprobe 1.
- $z_{\bar{x}_1}$
= ? : z-transformierter Stichprobenmittelwert.



Die Transformation nehmen wir anhand folgender Formel vor:

$$z_{\bar{x}_1} = \frac{\bar{x}_1 - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x}_1 - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}$$

=

$$\frac{60 - 50}{0,91} = 10,9890$$

.

Da wir jetzt

$$Z_{\bar{x}_1}$$

= 10,99 kennen, können wir anhand der z-Tabelle die Wahrscheinlichkeit bestimmen, mit der unser Mittelwert

$$\bar{x}_1$$

der Stichprobe 1 zufällig erreicht oder überschritten wird.

Nun muss entschieden werden, ob die einseitige oder die zweiseitige Überschreitungswahrscheinlichkeit bestimmt werden soll. Zu diesem Zweck rufen wir uns die Fragestellung in Erinnerung, sie lautet:

Ist ein Unterschied von +/- 10 Punkten zwischen den Leistungsmittelwerten der Population 0 und der Stichprobe 1 gross genug, damit man ihn bezüglich der Unterrichtsmethode interpretieren kann?

Da das Vorzeichen des Unterschieds keine Rolle spielt, sprechen wir von einer ungerichteten Fragestellung. Aus diesem Grunde haben wir der Arbeitshypothese H_0 eine ungerichtete Alternativhypothese

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_0$$

gegenüber gestellt. Gesucht wird damit die zweiseitige Überschreitungswahrscheinlichkeit der Prüfgrösse.

Vorschlag zur Vertiefung

- **Einzelarbeit:** Erstellen Sie eine Skizze von der Standardnormalverteilung, tragen Sie

$$Z_{\bar{x}_1}$$

für die zweiseitige Fragestellung ein und markieren Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der

$$Z_{\bar{x}_1}$$

erreicht und über- bzw. unterschritten wird. Beschriften Sie die Skizze.

- **Gruppenarbeit:** Jedes Gruppenmitglied erstellt eine Skizze von der Standardnormalverteilung, trägt

$$Z_{\bar{x}_1}$$

für die zweiseitige Fragestellung ein und markiert die Wahrscheinlichkeit, mit der

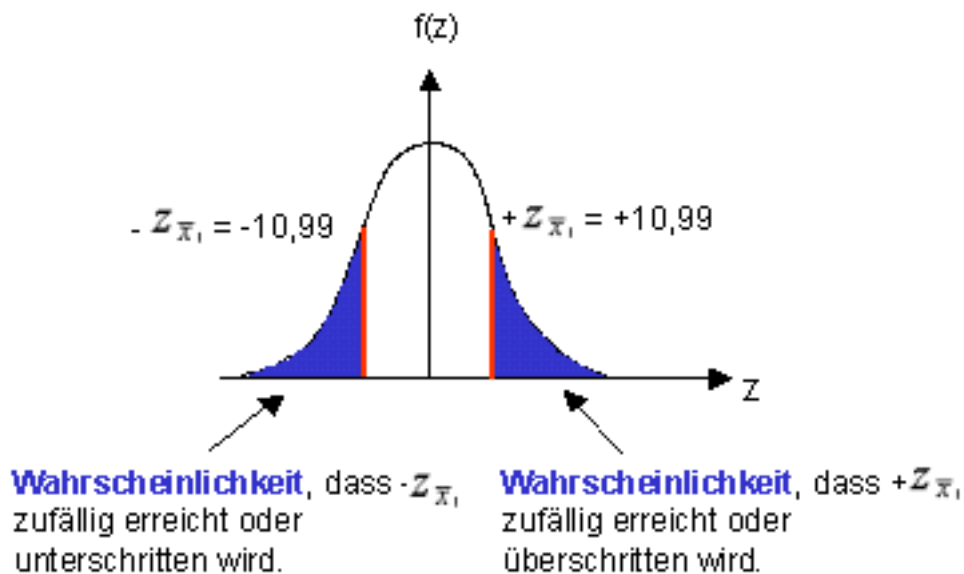
$$Z_{\bar{x}_1}$$

erreicht und über- bzw. unterschritten wird. Beschriften Sie die Skizze und diskutieren Sie miteinander die Lösungen. Klären Sie abweichende Lösungsvorschläge.

Antwort auf den Vertiefungsvorschlag

Die Graphik illustriert die zweiseitige Überschreitungswahrscheinlichkeit.

$$Z_{\bar{x}_1} = \frac{\bar{x}_1 - \mu_{\pi}}{\sigma_{\pi}} = \frac{\bar{x}_1 - \mu_0}{\sigma_{\pi}} = \frac{60 - 50}{0,91} = 10,9890$$



Die nachfolgende Graphik zeigt eine einfache z-Tabelle für zweiseitige Grenzwerte. Der höchste tabellierte z-Wert beträgt ± 3.0 . Zwischen $z = +3.0$ und $z = -3.0$ liegen 99.7 % aller Fälle. Da unser z-Wert mit ± 10.99 ausserhalb der Grenze liegt, kann die zweiseitige Überschreitungswahrscheinlichkeit p nur abgeschätzt werden: $p < 1\%$.

Unser Wert

$\pm Z_{\bar{x}_1} = 10,99$
ist auf der Tabelle
nicht mehr zu
finden. Er ist zu
hoch.

Der prozentuale Anteil, der zwischen $-z$ und $+z$ liegt					
z	B%	z	B%	z	B%
$\pm 0,1$	8,0	$\pm 1,1$	72,9	$\pm 2,1$	96,4
$\pm 0,2$	15,9	$\pm 1,2$	77,0	$\pm 2,2$	97,2
$\pm 0,3$	23,6	$\pm 1,3$	80,6	$\pm 2,3$	97,9
$\pm 0,4$	31,1	$\pm 1,4$	83,9	$\pm 2,4$	98,4
$\pm 0,5$	38,3	$\pm 1,5$	86,6	$\pm 2,5$	98,8
$\pm 0,6$	45,2	$\pm 1,6$	89	$\pm 2,6$	99,1
$\pm 0,7$	51,6	$\pm 1,7$	91,1	$\pm 2,7$	99,3
$\pm 0,8$	57,6	$\pm 1,8$	92,8	$\pm 2,8$	99,5
$\pm 0,9$	63,2	$\pm 1,9$	94,3	$\pm 2,9$	99,6
$\pm 1,0$	68,3	$\pm 2,0$	95,5	$\pm 3,0$	99,7

Wir beurteilen die ermittelte Überschreitungswahrscheinlichkeit $p < 1\%$ an den üblichen Signifikanzniveaus von 5%, 1% und 0.1% und kommen zum Schluss, dass die Arbeitshypothese H_0 mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $p < 1\%$ zu Gunsten der Alternativhypothese H_1 abgelehnt werden kann.

Formal bedeutet dies, dass mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $p < 1\%$ ausgeschlossen werden kann, dass die Stichprobe 1 aus einer Population 1 stammt, die hinsichtlich des Mittelwertes mit der Population 0 übereinstimmt.

Inhaltlich bedeutet dies, dass bei der Interpretation eines Unterschieds in den Leistungsmittelwerten von ± 10 Punkten der Zufall mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $p < 1\%$ ausgeschlossen werden kann. Der festgestellte Unterschied darf interpretiert werden.

Wenn in unserem Beispiel dieses Resultat bezüglich der Unterrichtsmethode interpretiert wird, so mag dies plausibel sein, ein formaler Beweis für diese Interpretation ist indessen nicht möglich. Unsere statistische Datenanalyse belegt nur, dass bei der Interpretation der Zufall mit einer bekannten Irrtumswahrscheinlichkeit ausgeschlossen werden kann.

Damit sind wir am Ende des Beispiels für grosse Stichproben.

2. Kleine Stichprobe

Im folgenden soll der in einer kleinen Stichprobe $n \approx 30$ erhobene Mittelwert eines Merkmals mit dem bekannten Merkmalsmittelwert einer Population verglichen werden. Zu diesem Zweck wird das für grosse Stichproben besprochene Beispiel modifiziert.

Bekannt ist wiederum der Mittelwert

$$\mu_0$$

der Prüfungsleistungen in der Population der europäischen Studierenden der Sozialwissenschaften. Eine kleine Stichprobe 2 ($n = 25$) von Studierenden aus England, die mit einer neuen Unterrichtsmethode unterrichtet wurde, absolvierte die standardisierte Prüfung. Dabei ergab sich eine Verteilung der Prüfungsleistungen, die mit den Kennwerten

$$\bar{x}_2 = 60$$

und

$$s_2 = 20$$

beschrieben werden kann.

Inhaltliche Fragestellung: Ist der Unterschied von +10 Punkten im Leistungsmittelwert so gross, dass er interpretiert werden darf oder kann dieser positive Unterschied auch zufällig entstanden sein?

Achtung: Wir fragen nach der Zufälligkeit des positiven Unterschieds. Wir stellen hier also eine gerichtete Frage.

Statistisch bearbeitbare Fragestellung: Stammt Stichprobe 2 aus einer Population 2, die hinsichtlich des Mittelwertes mit der Population 0 identisch ist?

Prüfgrösse: Aufgrund unserer Fragestellung ist der Stichprobenmittelwert

$$\bar{x}_2$$

die Prüfgrösse.

Arbeitshypothese H_0 :

$$\mu_2 = \mu_0$$

. Die Arbeitshypothese postuliert, dass die Studierenden der Stichprobe 2 aus England aus einer Population 2 stammen, die hinsichtlich des Leistungsmittelwertes mit der Population 0 der europäischen Studierenden identisch ist.

Alternativhypothese H_1 :

$$\mu_2 > \mu_0$$

. Unserer inhaltlichen Fragestellung entsprechend formulieren wir die Alternativhypothese H_1 gerichtet. Sie postuliert, dass die Stichprobe 2 aus einer Population 2 stammt, deren Leistungsmittelwert grösser ist als derjenige in Population 0. Da wir über die Grösse des Unterschieds keine Angabe machen, sprechen wir von einer unspezifischen Alternativhypothese.

Prüfverteilung: Bei kleinen Stichproben ($n \leq 30$) gilt das zentrale Grenzwerttheorem nicht. Wir können folglich nicht annehmen, dass die Stichprobenmittelwerte normalverteilt sind.

Bei kleinen Stichproben müssen wir voraussetzen, dass das interessierende Merkmal (die Leistungen in der Statistikprüfung) in den Populationen näherungsweise normalverteilt ist. Ist dies der Fall und unter der Annahme, dass H_0 gültig ist, sind die Stichprobenmittelwerte mit dem Freiheitsgrad $df = n-1$ t-verteilt.

Die Parameter der Prüfverteilung bestimmen wir wie folgt:

$$\mu_x = \mu_0$$

Vergleich eines Stichprobenmittelwertes mit einem Populationsmittelwert

= 50 und

$$\sigma_x = \sigma_0 / \sqrt{n} \text{ in unserem Fall } \sigma_x = 10 / \sqrt{25} = 2$$

df = n - 1 = 24

Um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, mit welcher der Stichprobenmittelwert

$$\bar{x}_2$$

zufällig erreicht oder überschritten wird, transformieren wir

$$\bar{x}_2$$

in die t-Verteilung. Zur Erinnerung:

Prüfgrösse:

$$\bar{x}_2 = 60$$

Parameter der Prüfverteilung:

$$\mu_x = 50; \sigma_x = 2$$

Transformation von

$$\bar{x}_2$$

:

$$t_{\bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_2 - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{10}{2} = 5$$

Der t-Tabelle kann nun unter dem Freiheitsgrad von df = (n - 1) abgeschätzt werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit p der Ausprägungsgrad von

$$t_{\bar{x}_2}$$

zufällig erreicht oder überschritten wird.

Soll die einseitige oder zweiseitige Überschreitungswahrscheinlichkeit bestimmt werden? Da wir eine einseitige Fragestellung untersuchen und dementsprechend auch eine gerichtete Alternativhypothese formuliert haben, ist für uns die einseitige Überschreitungswahrscheinlichkeit relevant.

Der folgende Ausschnitt aus einer einfachsten t-Tabelle zeigt die Grenzwerte für eine t-Verteilung mit den Freiheitsgraden df = 24.

df= 24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,79	3,08
p%	10%	5%	2,5%	1%	0,5%	0,25%

Unser $t_{\bar{x}_2} = 5$ kommt weit hinter die 1% Grenze zu liegen.

Da der Ausprägungsgrad von

$$t_{\bar{x}_2} = 5$$

über dem grössten Tabellenwert mit einer Überschreitungswahrscheinlichkeit von 0.25% liegt, begnügen wir uns mit einer Abschätzung der Überschreitungswahrscheinlichkeit p : $p < 1\%$.

Wir beurteilen die ermittelte Überschreitungswahrscheinlichkeit p an den üblichen Signifikanzniveaus von 5%, 1% und 0.1%. In unserem Fall ist $p < 1\%$, d.h. H_0

$$(\mu_2 = \mu_0)$$

kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit kleiner 1% zu Gunsten der Alternativhypothese H_1

$$(\mu_2 > \mu_0)$$

abgelehnt werden.

Formal bedeutet dies, dass mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $p < 1\%$ angenommen werden kann, dass die Stichprobe 2 aus einer Population 2 stammt, deren Mittelwert $\mu_{2.gif}$ grösser ist als der Mittelwert

$$\mu_0$$

der Population 0.

Damit steht mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $p < 1\%$ fest, dass die positive Differenz von +10 Punkten zwischen $x_{2_quer.gif}$ und

$$\mu_0$$

so gross ist, dass bei der Interpretation der Differenz der Zufall ausgeschlossen werden kann.

Auf was die positive Differenz zurückzuführen ist, kann mit statistischen Hilfsmitteln nicht entschieden werden. Wenn wir in unserem Beispiel die besseren Leistungen der Stichprobe 2 (englische Studierende) mit der neuen Lehrmethode erklären, so ist dies wohl plausibel aber formal nicht belegbar.

Lernkontrolle

Ausgangslage/Problemstellung:

Ein durchschnittlich trainierter Jogger/Joggerin braucht 2,5h nach dem Mittagessen für 1km Strecke 5 Minuten. Diese Leistung gilt als Standardwert. Die Populationsstandardabweichung beträgt 0,5 Minuten.

Vergleich eines Stichprobenmittelwertes mit einem Populationsmittelwert

Nach einer letzten Seminarveranstaltung vor den Sommerferien verabreden sich die 36 Studierenden zu einem Mittagessen. Als "krönenden Abschluss" beschliessen sie, gleich nach dem Mittagessen eine Joggingrunde von einem Kilometer zu bewältigen. Während des Umkleidens findet Leo, er möchte - angesichts des übermässig gefüllten Magens - die ganze Unternehmung nur mental durchstehen. Er verspricht den anderen, durch seine Joggingabstinenz einen Beitrag zur Grundlagenforschung zu leisten. Er wertet die Joggingleistung der anderen statistisch aus. Die Joggenden brauchen für einen Kilometer durchschnittlich 7 Minuten. Die Standardabweichung beträgt 0,75 Minuten.

Auftrag

Prüfen Sie die Aussage des Titels (*plenus venter non joggt libenter*) mit statistischen Mitteln.

Vergleich eines Stichprobenmittelwertes mit einem Populationsmittelwert

Lösung des Übungsbeispiels

Leitfaden zum Mittelwertvergleich	Lösung von "plenus venter non joggt libenter"
1. Formulieren Sie eine inhaltliche Frage zur Problemstellung.	Brauchen die Studierenden nach dem Mittagessen durchschnittlich tatsächlich länger, um eine Joggingstrecke von einem Kilometer zu bewältigen, oder kann der Unterschied von zwei Minuten zufällig entstanden sein?
2. Formulieren Sie eine statistisch bearbeitbare Frage.	Stammen die Studierenden, die gerade das Mittagessen verspiessen haben, aus einer Population, die hinsichtlich der mittleren Joggingzeit identisch ist mit der Population der Joggerinnen und Jogger, die das Mittagessen bereits verdaut haben?
3. Bestimmen Sie die Prüfgrösse und formulieren Sie die Arbeitshypothese H_0 und die Alternativhypothese H_1 .	Prüfgrösse: $\bar{x}_1 = 7 \text{ min}$ Arbeitshypothese H_0: $\mu_1 = \mu_0$ Alternativhypothese H_1: $\mu_1 > \mu_0$ Aufgrund der gerichteten Fragestellung formulieren wir eine gerichtete, unspezifische Alternativhypothese.
4. Bestimmen Sie die Prüfverteilung.	Unter der Annahme, dass H_0 gültig ist, sind Stichprobenmittelwerte von Zufallsstichproben der Grösse $n > 30$ mit den Parametern $\mu_x = \mu_0$ und $\sigma_x = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = \frac{0,5}{\sqrt{6}} = 0,083$ normalverteilt.
5. Transformieren Sie die Prüfgrösse in die Standardnormalverteilung (z-Verteilung).	Leo transformiert den Stichprobenmittelwert in die standardisierte Normalverteilung (z-Verteilung). $z_x = \frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{7 - 5}{0,083} = \frac{2}{0,083} = 24,09$
6. Entscheiden Sie aufgrund der Überschreitungswahrscheinlichkeit, ob Sie H_0 ablehnen oder nicht ablehnen können.	Wir prüfen eine gerichtete Fragestellung. Der Ausprägungsgrad von $z_{x_1} = 24,09$
http://mesosworld.ch - Stand vom: 20.1.2010	27 ist in unserer einfachen Tabelle nicht zu finden, die Überschreitungswahrscheinlichkeit p ist aber sicher kleiner als 0,1%. Die Arbeitshypothese H_0 wird mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $p < 0,1\%$ zu Gunsten